Université Paris 7 - Paris Diderot | Premier semestre 2012/13
Licence deuxième année - MM3 | Maths Info 2

Liste d'exercices pour la semaine 9

Exercice 1. Soit u un vecteur unitaire d'un espace vectoriel euclidien orienté E de dimension 3.
Déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme $f : E \to E$ défini par $f(x) = u \wedge x$.

Exercice 2. Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
On suppose que u et v commutent, montrer que $\mathrm{Im} u$ et $\ker u$ sont stables par v.
Que dire de la réciproque ?

Exercice 3. 1) Soient $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et D l'endomorphisme de E qui à f associe sa dérivée f'.
Déterminer les valeurs propres de D ainsi que les sous-espaces propres associés.

2) Soient E l'espace des suites réelles convergeant vers 0 et $\Delta : E \to E$ l'endomorphisme défini par

$$\Delta(u)(n) = u(n+1) - u(n)$$

Déterminer les valeurs propres de Δ.

Exercice 4. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que tout vecteur non nul en soit vecteur propre.
Montrer que u est une homothétie vectorielle.

Exercice 5. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u^3 = \mathrm{Id}$. Justifier

$$\ker(u - \mathrm{Id}) \oplus \ker(u^2 + u + \mathrm{Id}) = E$$

Exercice 6. a) Montrer que deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.
b) Réciproque ?

Exercice 7. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On désire établir l'égalité des polynômes caractéristiques

$$\chi_{AB} = \chi_{BA}$$

a) Etablir l'égalité quand $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
b) Pour $A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, justifier que pour $p \in \mathbb{N}$ assez grand $A + \frac{1}{p} I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
En déduire que l'égalité est encore vraie pour A non inversible.

Exercice 8. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrices réelles.
a) Calculer $AM - MA$.
b) Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme $M \mapsto AM - MA$.

Exercice 9. Soient $n \geqslant 3$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & (0) & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

a) Calculer les rangs de A et A^2.

b) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement représenté par la matrice A. Montrer

$$\ker f \oplus \mathrm{Im} f = \mathbb{R}^n$$

c) En déduire que la matrice A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ (0) & & & B \end{pmatrix} \text{ avec } B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

d) Calculer $\mathrm{tr}B$ et $\mathrm{tr}B^2$.
En déduire les valeurs propres de B puis celles de A.

e) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 10. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \text{ et } B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$$

a) On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

b) On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

c) Mêmes questions avec B.

Exercice 11 (Examen 2 2010)**.** Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie. Soit $u \in L(E)$ diagonalissable. On considère $C = v \in L(E) | u \circ v = v \circ u$

1) Montrer que C est un sous-espace vectoriel de $L(E)$.
2) Montrer que si $v \in C$, alors les sous-espaces vectoriels propres de u sont stables par v
3) Montrer la réciproque de la question précédente.
   Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on note E_λ l'espace propre correspondant et $\mu_\lambda = \dim(E_\lambda)$.
4) Pour $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_N$ valeurs propres de u, calculer la dimension de $L(E_{\lambda_1}) \times L(E_{\lambda_2}) \times \ldots \times L(E_{\lambda_N})$ en fonction des μ_λ.
5) En déduire que $\dim(C) = \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} (\mu_\lambda^2)$
6) Calculer $\dim(C)$ pour $u \in L(\mathbb{C}^3)$ de matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$

Exercice 12. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. La matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -b & c \\ a & 0 & -c \\ -a & b & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

est-elle diagonalisable ?