Liste d'exercices pour la semaine 8

Exercice 1 (Matrice de Vandermonde)**.** On considère la matrice de Vandermonde

$$V = \begin{vmatrix} \frac{P(X)}{X-\lambda_1} & \frac{P(X)}{X-\lambda_2} & \cdots & \frac{P(X)}{X-\lambda_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \cdots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

a) Montrer que si $\forall i \neq j, \alpha_i \neq \alpha_j$, alors V est inversible.

b) En introduisant, pour $X = (x_1, ..., x_n)$, le polynôme $P(Y) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i Y^i$, montrer que la réciproque est vraie.

c) Montrer que $\det V = \prod_{1\leq i<j\leq n}(\alpha_j - \alpha_i)$.

d) Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ distincts et $P(X) = \prod\limits_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$. Calculer :

$$\Delta(X) = \begin{vmatrix} \frac{P(X)}{X-\lambda_1} & \frac{P(X)}{X-\lambda_2} & \cdots & \frac{P(X)}{X-\lambda_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \cdots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

(Remarque : le déterminant d'une telle matrice est utilisé dans de nombreuses applications : problème d'interpolation, Transformée de Fourier discrète, formule de Frobenius, diagonalisation des matrices compagnons...)

Exercice 2 (Système de Cramer)**.** Soient a, b, c et d des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts.
Résoudre sur $\mathbb{K}$ les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^3x + b^3y + c^3z = d^3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + z = a \\ x + jy + j^2z = b \\ x + j^2y + jz = c \end{cases}$ en fonction de $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Exercice 3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

a) Montrer que A est semblable à une matrice dont les $n - 1$ premières colonnes sont nulles.

b) En déduire

$$A^2 = \mathrm{tr}(A).A \text{ et } \det(I_n + A) = 1 + \mathrm{tr}A$$

Exercice 4. Soient $a \neq b$ et $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. On pose

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a + x & \cdots & a + x \\ b + x & \lambda_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a + x \\ b + x & \cdots & b + x & \lambda_n + x \end{vmatrix}_{[n]}$$

a) Montrer que $\Delta_n(x)$ est une fonction affine de x.

b) Calculer $\Delta_n(x)$ et en déduire $\Delta_n(0)$.

Exercice 5. Soient $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ antisymétrique et $J \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Etablir

$$\forall x \in \mathbb{R}, \det(A + xJ) = \det A$$

Exercice 6 (Examen 2010)**.** Soient A et B deux matrices dans $M_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 1$. Le but du problème est de montrer que le déterminant de la matrice définie par blocs $D = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$ est positif.

a) Justifier dans le cas $n = 1$. b) Vérifier que les coefficients de $A + iB$ sont les conjugués complexes des coefficients de $A - iB$. En déduire que $\det(\bar{A} + iB) = det(A - iB)$.

c) En déduire que $\det(A + iB) \times \det(A - iB)$ est un nombre réel positif.

d) On considère la matrice définie par blocs $C = \begin{pmatrix} A - iB & -B \\ 0 & A + iB \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det C$ est un réel positif

e) En utilisant des opérations sur les lignes et les colonnes, montrer que $\det C = \det D$. Conclure.

Exercice 7. Soient n un entier supérieur à 2 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Etablir

$$\begin{cases} \operatorname{rg}(A) = n & \Rightarrow \operatorname{rg}(\operatorname{com}(A)) = n \\ \operatorname{rg}(A) = n - 1 & \Rightarrow \operatorname{rg}(\operatorname{com}(A)) = 1 \\ \operatorname{rg}(A) \leqslant n - 2 & \Rightarrow \operatorname{rg}(\operatorname{com}(A)) = 0 \end{cases}$$

b) Montrer

$$\det(\operatorname{com}(A)) = (\det A)^{n-1}$$

c) En déduire

$$\operatorname{com}(\operatorname{com}(A))$$

Exercice 8. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit $\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_r \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

Exercice 9. Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10. On considère une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible écrite sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

On écrit la comatrice de M sous une forme analogue

$$\operatorname{com} M = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$$

avec $A' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $D' \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

Vérifier

$$\det A' = \det(M)^{p-1} \det D$$