Université Paris 7 - Paris Diderot | Premier semestre 2012/13
Licence deuxième année - MM3 | Maths Info 2

Liste d'exercices pour la semaine 7

Exercice 1. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
a) Calculer $(A+I)^3$.
b) En déduire que A est inversible.

Exercice 2 (Représentation matricielles d'une application linéaire 1)**.** Déterminer la matrice relative aux bases canoniques des applications linéaires f suivantes :

a) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \mapsto (x+y, y-2x+z) \end{cases}$

b) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (y+z, z+x, x+y) \end{cases}$

c) $f : \begin{cases} \mathbb{R}_3\left[X\right] \to \mathbb{R}_3\left[X\right] \\ P \mapsto P(X+1) \end{cases}$

d) $f : \begin{cases} \mathbb{R}_3\left[X\right] \to \mathbb{R}^4 \\ P \mapsto (P(1), P(2), P(3), P(4)) \end{cases}$

Exercice 3 (Représentation matricielles d'une application linéaire 2)**.** Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$ vérifiant
$$f^n = 0 \text{ et } f^{n-1} \neq 0$$
a) Justifier qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $\mathcal{B} = \left(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x)\right)$ forme une base de E.
b) Déterminer les matrices de $f, f^2, \ldots, f^{n-1}$ dans cette base.
c) En déduire que
$$\{g \in \mathcal{L}(E) / g \circ f = f \circ g\} = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$$

Exercice 4 (Changement de base)**.** Soit
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est A.
On pose $\varepsilon_1 = (1,1,1), \varepsilon_2 = (1,-1,0), \varepsilon_3 = (1,0,1)$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.
a) Montrer que $\mathcal{B}'$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$.
b) Ecrire la matrice de f dans cette base.
c) Déterminer une base de $\ker f$ et de $\mathrm{Im} f$.

Exercice 5. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$AB = A + B$$

Montrer que A et B commutent. (Indication : Calculer $(I_n - A)(I_n - B)$)

Exercice 6. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ représenté dans la base canonique $\mathcal{B}$ par :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Soit $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ avec $\varepsilon_1 = (1,0,1), \varepsilon_2 = (-1,1,0), \varepsilon_3 = (1,1,1)$.
Montrer que $\mathcal{C}$ est une base.

b) Déterminer la matrice de f dans $\mathcal{C}$.

c) Calculer la matrice de f^n dans $\mathcal{B}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.

a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{C}$ soit D.

b) Déterminer la matrice P de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1}.

c) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) En déduire le terme général des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 2(y_n + z_n) \\ y_{n+1} = x_n - z_n \\ z_{n+1} = 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}$$

Exercice 8. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Calculer

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_2 \\ (a_1) & & & a_1 \end{vmatrix}$$

Exercice 9. Calculer en établissant une relation de récurrence

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 10. Soit A une matrice antisymétrique d'ordre $2n+1$. Montrer que $\det A = 0$.
Ce résultat est-il encore vrai lorsque A est d'ordre pair ?

Exercice 11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \ldots, C_n$.
Calculer le déterminant de la matrice B de colonnes $C_1 - C_2, \ldots, C_{n-1} - C_n, C_n - C_1$.

Exercice 12. On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ si la matrice A est à coefficients entiers, qu'elle est inversible et que son inverse est à coefficients entiers.

a) Montrer que si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ alors $|\det A| = 1$.

b) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall k \in \{0, 1, \ldots, 2n\}\,, A + kB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.
Calculer $\det A$ et $\det B$.

Exercice 13. a) Soit A une matrice carrée $n \times n$ à coefficients réels. Montrer que les vecteurs colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si ${}^tAA = I$ (où I est la matrice identité).

b) A étant telle que ${}^tAA = I$, quel est le déterminant de A ?

On note $O(n)$ lensemble des matrices carrées $n \times n$ telles que ${}^tAA = I$.

c) Montrer que $O(n)$ est stable par multiplication. En déduire que $O(n)$ est un groupe (multiplicatif).

Exercice 14. Sur un corps commutatif quelconque, on note I_p la matrice identité de taille $p \times p$. On note 0 toute matrice nulle (carrée ou non) quelle que soit sa taille. Soit B une matrice (carrée) de taille $q \times q$,et C une matrice de taille appropriée pour que la matrice (représentée ici « par blocs ») soit carrée (de taille $(p+q) \times (p+q)$) : $M = \begin{pmatrix} I_p & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$

a) Montrer que $det(M) = det(B)$.

Soit maintenant A une matrice (carrée) de taille $p \times p$.

b) Montrer que $det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = det(A)det(B)$.

c) Calculer le déterminant de la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$