Liste d'exercices pour la semaine 6

Exercice 1. *Soit E un espace vectoriel sur un corps K, et soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E.*

(a) Montrer que $F = \bigcap_{i\in I} A_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

On note $\sum_{i\in I} A_i$ l'ensemble des vecteurs x de E tels qu'il existe un sous-ensemble fini J de I, et pour chaque $i \in J$ un vecteur x_i de A_i, tels que $x = \sum_{i\in J} x_i$.

(b) Montrer que $\sum_{i\in I} A_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

On note H l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels G de E tels que $\forall_{i\in I}\ A_i \subset G$.

(c) Montrer que $H = \sum_{i\in I} A_i$.

Exercice 2. **(a)** Montrer par un exemple que si A, B et C sont trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, les sous-espaces $A \cap (B + C)$ et $(A \cap B) + (A \cap C)$ sont généralement distincts (mais qu'on quand même toujours l'inclusion dans un sens).

(b) Trouver un exemple de trois sous-espaces vectoriels A, B et C d'un espace vectoriel E, tels que $A \cap B = B \cap C = C \cap A = 0$, et tels que la somme $A + B + C$ ne soit pas directe.

Exercice 3. **(a)** On pose $\vec{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{e}_2 = (1, 1, 0)$ et $\vec{e}_3 = (0, 1, 1)$.
Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.
Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $\vec{\varepsilon}_i = \vec{e}_1 + \cdots + \vec{e}_i$.

Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_n)$ est une base de E.

(c) Exprimer les composantes dans $\mathcal{B}'$ d'un vecteur en fonction de ses composantes dans $\mathcal{B}$.

Exercice 4. Déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes :

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$

b) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z, t) = (2x + y + z, x + y + t, x + z - t)$

c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + i\bar{z}$ ($\mathbb{C}$ est ici vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel).

Exercice 5. *Soit p un nombre premier, et E un espace vectoriel de dimension n sur le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.*

(a) Déterminer le nombre d'éléments de E.

(b) Déterminer le nombre de bases de E.

(c) Montrer que le nombre entier $p^{\frac{n(n-1)}{2}}(p^n - 1)(p^{n-1} - 1)(p^{n-2} - 2) \ldots (p - 1)$ est divisible par $n!$.

Exercice 6. *Soit E un espace vectoriel (sur un corps K quelconque), et soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour tout $x \in E$, on note $e_i^*(x)$ la coordonnée de x selon le vecteur e_i dans la base $\mathcal{B}$.*

(a) Montrer que $e_i^* : E \to K$ est une application linéaire.

On note E^* (et on appelle « dual de E ») l'ensemble des applications linéaires de E vers K.

(b) Montrer que E^* est un espace vectoriel sur K (pour les opérations évidentes).

(c) Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de E^*.

(d) Montrer que pour tout $l \in E^*$, $l(e_i)$ est la coordonnée de l selon le vecteur e_i^* dans la base $\mathcal{B}'$.

(e) Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, on considère les formes linéaires $f_0, \ldots, f_n$ déterminées par $f_j(P) = \int_0^1 x^j P(x)\,\mathrm{d}x$. Montrer que la famille $(f_0, \ldots, f_n)$ est une base du dual de E.

Exercice 7. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E, $F = \mathrm{V}ect(e_1, \dots, e_p)$ et G un supplémentaire de F dans E. Pour tout $a \in G$, on note

$$F_a = \mathrm{Vect}(e_1 + a, \dots, e_p + a)$$

a) Montrer que

$$F_a \oplus G = E$$

b) Soient $a, b \in G$. Montrer

$$a \neq b \Rightarrow F_a \neq F_b$$

Exercice 8. *Soit U la réunion d'un ensemble fini d'intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ deux à deux disjoints. Soit E l'espace des fonctions dérivables de U vers $\mathbb{R}$ et F l'espace de toutes les fonctions de U vers $\mathbb{R}$.*

(a) Montrer que E et F sont des espaces vectoriels réels et que la dérivation D (définie par $D(f) = f'$) est une application linéaire de E vers F.

(b) Quelle est la dimension du noyau de D ?

Exercice 9. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et $f : E \to E$ une application linéaire. On note f^p le composé $f \circ \dots \circ f$ (p fois la lettre f).*

(a) Montrer que $(\forall_{x \in E}\ \exists_{p \in \mathbb{N}}\ f^p(x) = 0) \Rightarrow (\exists_{p \in \mathbb{N}}\ f^p = 0)$.

(b) Montrer par un exemple que le résultat de la question **(a)** est généralement faux si la dimension de E est infinie.

(c) Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}(f^i) \subset \mathrm{Ker}(f^{i+1})$.

On suppose désormais que $\{p \in \mathbb{N} \mid f^p = 0\}$ n'est pas vide, et on note q son plus petit élément.

(d) Montrer que si $\mathrm{Ker}(f^i) = \mathrm{Ker}(f^{i+1})$, alors $i \geq q$.

(e) En déduire que $q \leq n$.