Université Paris 7 - Paris Diderot
Licence deuxième année - MM3

Premier semestre 2012/13
Maths Info 2

Liste d'exercices pour la semaine 5

Exercice 1. Etudier l'existence des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}}$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$ e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$

Exercice 2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres réels a et b pour que les intégrales suivantes existent :

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a(t-1)^b}$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$ c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^a\mathrm{e}^{-t}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

a) Montrer que f tend vers zéro en $+\infty$.
b) Montrer que $xf(x)$ tend vers zéro quand $x \to +\infty$
c) Si on supprime l'hypothèse décroissante, déterminer un exemple de fonction f continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ telle que f ne tend pas vers zéro en $+\infty$.

Exercice 4. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = x^2\cos\left(1/x^2\right) \text{ si } x \in \,]0,1] \text{ et } f(0) = 0$$

Montrer que f est dérivable sur $[0,1]$mais que sa dérivée f' n'est pas intégrable sur $]0,1]$.

Exercice 5. On pose pour $f(a) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a+1}$.

a) Pour quelles valeurs de a, l'intégrale définissant $f(a)$ existe-t-elle ?
b) Montrer que la fonction est décroissante et de limite nulle en $+\infty$.

Exercice 6 (Fonction Γ d'Euler)**.** Pour $x > 0$ on note

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que cette dernière intégrale est bien définie pour tout $x > 0$.
b) Justifier

$$\forall x > 1, \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$$

et calculer $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 7. Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant $f(0) = 0$. Etablir

$$\forall x > 0, \int_0^x \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t \leqslant 2\int_0^x \frac{f(t)f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

en justifiant l'existence des intégrales écrites.

Exercice 8 (Calcul de l'intégrale de Gauss)**.** a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$$

En déduire

$$\forall t \in \mathbb{R}, 1 - t^2 \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Etablir l'existence des intégrales suivantes

$$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t, I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t \text{ et } J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$$

puis établir

$$I_n \leqslant \frac{I}{\sqrt{n}} \leqslant J_n$$

c) On pose

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,\mathrm{d}x$$

Etablir

$$I_n = W_{2n+1} \text{ et } J_{n+1} = W_{2n}$$

d) Trouver une relation de récurrence entre W_n et W_{n+2}.
En déduire la constance de la suite de terme général

$$u_n = (n+1)W_n W_{n+1}$$

e) Donner un équivalent de W_n et en déduire la valeur de I.

Exercice 9 (Partiel 2012)**.**

1) Soit $f(x) = e^{-x^2}$. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}$.
   On admet dans la suite $\int_{\mathbb{R}} f = \sqrt{\pi}$.
2) Montrer que $g(x) = e^{-x}/\sqrt{x}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et calculer $\int_{]0,+\infty[} g$.
3) Pour $n \geq 0$, on pose $g_n(x) = x^n g(x)$. Montrer que g_n est intégrable sur $]0, +\infty[$.
4) Démontrer que $\int_{]0,+\infty[} g_{n+1} = \frac{2n+1}{2} \int_{]0,+\infty[} g_n$ pour $n \geq 0$ (on pourra faire une IPP à justifier soigneusement).
5) En déduire $\int_{]0,+\infty[} g_n = \frac{(2n)!}{n!4^n}\sqrt{\pi}$.

Exercice 10 (Intégrale de Dirichlet)**.** Justifier la convergence de l'intégrale suivante

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 11 (Intégrales de Fresnel)**.** Montrer la convergence des deux intégrales suivantes

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$$