Université Paris 7 - Paris Diderot
Licence deuxième année - MM3

Premier semestre 2012/13
Maths Info 2

Liste d'exercices pour la semaine 4

Exercice 1 (Règle de d'Alembert)**.** a)Soit (u_n) une suite numérique, telle que la limite suivante existe $l = \lim_{n\to\infty} \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$. Etudier la convergence de $\sum u_n$ en fonction de l.

b)Applications : Déterminer la nature des séries de terme général
$u_n = \dfrac{n!}{n^n}$ $\qquad u_n = \dfrac{1}{x^n + \frac{1}{x^n}}$

Exercice 2. a) Soit $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent à $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

b) Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ a-t-elle un sens ?

c) Montrer qu'alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$.

Exercice 3. Soit la famille $u_{p,q} = \frac{2p+1}{p+q+2} - \frac{p}{p+q+1} - \frac{p+1}{p+q+3} \quad (p,n) \in \mathbb{N}^2$.
Calculer $\sum_q \sum_p u_{p,q}$ et $\sum_p \sum_q u_{p,q}$

Exercice 4 (Produit de Cauchy)**.** Soit la suite $w_n = 2^{-n} \sum_{n=0}^{n} \frac{4^k}{k!}$. a)Montrer que la série $\sum w_n$ converge.

b) Calculer la somme en faisant aparaître un produit de Cauchy.

Exercice 5. Soit (u_n) une suite numérique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} 2^k u_k$$

a) On suppose dans cette question la série $\sum u_n$ absolument convergente.
En observant un produit de Cauchy, montrer que la série $\sum v_n$ converge et exprimer sa somme en fonction de celle de $\sum u_n$.

b) On suppose dans cette question que la suite (u_n) tend vers 0. Déterminer la limite de (v_n)

c) On suppose dans cette dernière question la série $\sum u_n$ convergente.
Montrer la convergence de $\sum v_n$ et déterminer sa somme en fonction de celle de $\sum u_n$.

Exercice 6. Existence et calcul de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)3^{-n}$$

Exercice 7 (Transformation d'Abel)**.** On considère la série $\sum_{n=0}^{N} a_n v_n$ a) Effectuer la transformation d'Abel sur cette série en faisant apparaître $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

b) (Théorème d'Abel). On suppose que la suite (v_n) est décroissante et tend vers 0, et S_n bornée. Montrer alors que $\sum_{n=0}^{N} a_n v_n$ converge.

c) Applications : Etudier la convergence de $\sum_n \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$, avec $\theta \in \mathbb{R}, \alpha > 0$.

Exercice 8 (Intégrabilité)**.** Etudier l'existence des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}}$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$ e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$

Exercice 9. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres réels a et b pour que les intégrales suivantes existent :

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a(t-1)^b}$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$ c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^a\mathrm{e}^{-t}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$

Exercice 10 (Intégrale de Dirichlet)**.** Justifier la convergence de l'intégrale suivante

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

On peut montrer que celle-ci est égale à $\pi/2$ mais c'est une autre histoire...

Exercice 11 (Intégrales de Fresnel)**.** Montrer la convergence des deux intégrales suivantes

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$$