Université Paris 7 - Paris Diderot
Licence deuxième année - MM3

Premier semestre 2012/13
Maths Info 2

Liste d'exercices pour la semaine 3

Exercice 1. Rappels sur les calculs de primitives, intégrales, Integration par parties, changement de variable... Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_1^2 \frac{dt}{t^2}$ b) $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ c) $\int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Calculer les intégrales suivantes via une intégration par parties

a) $\int_0^1 \ln(1+t^2)\,dt$ b) $\int_1^{e} t^n \ln t\,dt$ (avec $n \in \mathbb{N}$) c) $\int_1^{e^\pi} \sin(\ln t)\,dt$

Calculer les intégrales suivantes via un changement de variable adéquat

a) $\int_1^{e} \frac{dt}{t+t(\ln t)^2}$ b) $\int_1^{e} \frac{dt}{t\sqrt{\ln t+1}}$ c) $\int_0^1 \frac{dt}{e^t+1}$

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ? lesquelles sont fausses ? Justifier la réponse.

1) Si pour tout $n > 0 u_n > 0$ et si la suite (u_n) est décroissante et a pour limite 0, alors la série de terme général u_n est convergente.
2) Si pour tout $n > 0, u_n > 0$ et si la série de terme général u_n est convergente, alors la suite u_n est décroissante à partir d'un certain rang.
3) Si pour tout $n > 0, u_n > 0$ et si la série de terme général u_n est convergente, alors la série de terme général u_n est convergente.
4) Si pour tout $n > 0, u_n > 0$ et si la série de terme général u_n est convergente, alors la série de terme général u_{n^2} est convergente.

Exercice 3. Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants

a) $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ b) $u_n = \dfrac{\text{ch} n}{\text{ch} 2n}$

c) $u_n = e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

Exercice 4. Sommes de Riemann

1) Déterminer les limites des suites définies par le terme général suivant :

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$ b) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$ c) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$

2) En faisant apparaître une somme de Riemann, déterminer un équivalent simple de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$$

Exercice 5. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes. Montrer que les suivantes sont aussi convergentes

$$\sum \max(u_n, v_n), \sum \sqrt{u_n v_n} \text{ et } \sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$$

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante de réels strictement positifs.

a) On suppose que $\sum u_n$ converge. Montrer que la série de terme général $v_n = n(u_n - u_{n+1})$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

b) Réciproquement, on suppose que la série de terme général $n(u_n - u_{n+1})$ converge. Montrer que la série de terme général $u_n$converge si, et seulement si, la suite (u_n) converge vers 0.

c) Donner un exemple de suite (u_n) qui ne converge pas vers 0, alors que la série de terme général $n(u_n - u_{n+1})$ converge.

Exercice 7. Séries alternées Déterminer la nature de $\sum u_n$ pour :

a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$ b) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

c) $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n+1}\right)$ d) $u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$

Exercice 8. (Partiel 2011) On considère la suite $u_n = \dfrac{1}{n - 20\sqrt{n} + 200}$.

1) Montrer que la suite u_n est bien définie pour $n \geq 0$ entier.
2) Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{k\geq 0} u_n$. Montrer que $\sum\limits_{k\geq 0} {u_n}^2$ est convergente.
3) Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{k\geq 0} (-1)^n u_n$.
4) Trouver un équivalent simple de $\sum\limits_{k\geq N} {u_n}^2$ quand N tend vers $+\infty$.

Exercice 9. En exploitant une comparaison avec des intégrales établir

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \sim \frac{2}{3} n\sqrt{n}$ b) $\ln(n!) \sim n \ln n$ c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} \sim \ln(\ln n)$

Exercice 10. 1) Soit $\alpha < 1$. Déterminer un équivalent de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

quand n tend vers $+\infty$.

2) Donner un équivalent simple à $R_N = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha > 1$ donné quand n tend vers $+\infty$..