Université Paris 7 - Paris Diderot
Licence deuxième année - MM3

Premier semestre 2012/13
Maths Info 2

Liste d'exercices pour la semaine 2

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $f(2x) = f(x)$.
Montrer que f est une fonction constante.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 et en 1 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x^2)$.
Montrer que f est constante.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et prenant la valeur 1 en 0.
On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)\cos x$. Déterminer f (indication : se servir de $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$).

Exercice 4. Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de l'application $f : x \mapsto E(x) + \sqrt{x - E(x)}$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.
Montrer que f est totalement discontinue.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $x \mapsto f(x)$ est croissante et $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante.
Montrer que f est continue.

Exercice 7. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.
Montrer que $\sup(f, g)$ est une fonction continue sur I.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y)$.
a) Calculer $f(0)$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.
b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.
c) Etablir que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = ar$ avec $a = f(1)$.
d) Conclure que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$.

Exercice 9. On cherche les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(y)\right)$.
a) On suppose f solution et $f(0) = f(1) = 0$.
Montrer que f est périodique et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $2f(x) = f(2x)$. En déduire que f est nulle.
b) Déterminer toutes les fonctions f solutions.

Exercice 10. Soit $I = [a; b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissante. Montrer que si $f(I)$ est un intervalle, alors f est continue. Etendre le résultat au cas d'une fonction strictement décroissante.

Exercice 11. Soit $f : [0, 1[\to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que f est bornée.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et tendant vers 0 à l'infini.
Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue vérifiant

$$\forall x > 0, f(nx) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Montrer que f converge vers 0 en $+\infty$.

Exercice 14. Soit f une fonction convexe de $[a; b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'elle est continue sur $]a; b[$.

Exercice 15. A l'aide d'une formule de trigonométrie, montrer que tan n'est pas uniformément continue sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Exercice 16. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$.
a) On suppose que f est continue. Montrer que f admet un point fixe.
b) On suppose que f est croissante. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 17. Soit (u_n) une suite strictement croissante de réels de $[0, 1]$ de limite 1. Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(u_n x + 1 - x)}{2^n}$$

Exercice 18. Soient $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ continues vérifiant

$$f \circ g = g \circ f$$

Montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ telle que $f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 19. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^n$ s'annulant en $n + 1$ points distincts de I.
a) Montrer que la dérivée $n$ème de f s'annule au moins une fois sur I.
b) Soit α un réel. Montrer que la dérivée $(n - 1)$ ème de $f' + \alpha f$ s'annule au moins une fois sur I.
(indice : on pourra introduire une fonction auxiliaire.)

Exercice 20. Soit $a > 0$ et $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) = f(a) = 0$ et $f'(0) = 0$.
a) Montrer que la dérivée de $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ s'annule sur $]0, a[$.
b) En déduire qu'il existe un point autre que l'origine en lequel la tangente à f passe par l'origine.

Exercice 21. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
Montrer que $\forall x > 0, \exists c > 0, f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c))$.

Exercice 22. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.
Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 23. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $\lim\limits_{+\infty} f = f(0)$.
Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 24. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que $f(0) = 0$ et que f' est croissante. Montrer que $\frac{f(x)}{x}$ est croissante sur $]0, +\infty[$

Exercice 25. A l'aide du théorème des accroissements finis déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left((x + 1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)$.

Exercice 26. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^n}$$

a) Calculer u_0, u_1, u_2.
b) Montrer que (u_n) est une suite strictement croissante.
c) Montrer que $u_n \to 1$.
d) Etablir

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \int_0^1 \frac{x^n \, \mathrm{d}x}{1 + x^n} = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1 + x^n) \, \mathrm{d}x$$

e) Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x = 0$$

et en déduire que

$$u_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 27. Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues avec f décroissante et positive.

a) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a_k\right) \int_{a_k}^{a_{k+1}} g(t)\,\mathrm{d}t \text{ avec } a_k = a + k\frac{(b-a)}{n}$$

Montrer que

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

b) On introduit G la primitive de g s'annulant en a.

Montrer que

$$f(a)\min_{[a,b]} G \leqslant S_n \leqslant f(a)\max_{[a,b]} G$$

c) En déduire qu'il existe $c \in [a, b]$ vérifiant

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a)\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues avec f monotone.
Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a)\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t + f(b)\int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t$$