Université Paris 7 - Paris Diderot
Licence deuxième année - MM3

Premier semestre 2012/13
Maths Info 2

Liste d'exercices pour la semaine 12

Exercice 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente.

a) Montrer que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.

b) Le résultat est-il encore vrai pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que $A^p = 0$.

c) Montrer que $A^n = 0$.

d) Calculer $\det(A + I_n)$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $AM = MA$.

e) Calculer $\det(A + M)$ (on pourra commencer par le cas où $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$).

f) Le résultat est-il vrai si M ne commute pas avec A ?

Exercice 2. Résoudre les systèmes différentiels suivants

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z \\ y' = 10x - 5y + 7z \\ z' = 4x - 2y + 2z \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases} \quad \begin{cases} x_1' = -x_1 + 3x_2 + \mathrm{e}^t \\ x_2' = -2x_1 + 4x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

Exercice 3 (Examen 2 2011)**.** On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

1) Montrer que A est diagonalisable et diagonaliser A.

2) Résoudre le système différentiel $X'(t) = AX + B$ où $X : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ est $\mathcal{C}^1$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) Quelles sont les solutions X du système telles qu'il existe $M, A > 0$ satisfaisant $||X(t)|| \leq M$ pour tout $t > A$?

Exercice 4 (Examen 2011)**.** On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

1) Montrer que A est diagonalisable et diagonaliser A.

2) Résoudre le système différentiel $X'(t) = AX + B$ où $X : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ est $\mathcal{C}^1$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3) Parmi les solutions du système, quelles sont les solutions constantes ?

Exercice 5 (Examen 2010)**.** Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1) Déterminer le spectre de u.

2) u est-il trigonalisable ?

Soit $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel des fonctions $X(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $X'(t) = AX(t)$.

3) Montrer qu'il existe une famille libre $\{S_1, S_2\} \in \mathcal{S}$ de fonctions qui sont bornées sur $]-\infty, 0]$

4) u est-il diagonalisable. Quel est le polynôme minimal de u ?

5) Déterminer les sous espaces caractéristiques de u.

6) Trouver explicitement une base de $\mathcal{S}$

Exercice 6 (Examen 2 2010)**.** Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On étudie le système différentiel linéaire $X'(t) = AX(t) + B$ noté ξ.

1) Calculer les valeurs propres de A.

2) Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A. Vérifier que ces vecteurs propres sont orthogonaux pour le produit scalaire usuel.

3) Résoudre le système homogène $\mathcal{S}$ de ξ.

4) Quelles sont les solutions de $\mathcal{S}$ bornées sur $[0, +\infty[$?

5) Trouver une solution particulière du système ξ.

6) Résoudre le système ξ.