Université Paris 7 - Paris Diderot — Premier semestre 2012/13

Licence deuxième année - MM3 — Maths Info 2

Liste d'exercices pour la semaine 11

Exercice 1. Soit P un polynôme annulateur d'un endomorphisme f.
Montrer que si λ est valeur propre de f alors $P(\lambda) = 0$.

Exercice 2. Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$AB - BA = C$$

On suppose en outre que C commute avec les matrices A et B.

a) On suppose que A et diagonalisable. Montrer que la matrice C est nulle.

b) On suppose que la matrice C est diagonalisable. Montrer à nouveau de que la matrice C est nulle.

Exercice 3. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Calculer le polynôme caractéristique de A.

b) Trigonaliser la matrice A.

c) Faire de même avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et } A = \begin{pmatrix} i & 2 & -1 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer μ_A.

Exercice 5. Soit $a \in \mathbb{R}^\star$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le polynôme minimal de A.

b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

c) Calculer e^A.

Exercice 6. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant

$$f^2 = f^3 \text{ et } \dim\ker(f - \mathrm{Id}) = 1$$

Montrer l'existence d'une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha \in \{0, 1\}$$

Exercice 7. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et u, v, f trois endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie vérifiant

$$\begin{cases} f = \alpha u + \beta v \\ f^2 = \alpha^2 u + \beta^2 v \\ f^3 = \alpha^3 u + \beta^3 v \end{cases}$$

Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente.

a) Montrer que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.

b) Le résultat est-il encore vrai pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que $A^p = 0$.

c) Montrer que $A^n = 0$.

d) Calculer $\det(A + I_n)$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $AM = MA$.

e) Calculer $\det(A + M)$ (on pourra commencer par le cas où $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$).

f) Le résultat est-il vrai si M ne commute pas avec A ?

Exercice 9. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que p^2 soit un projecteur.

a) Quelles sont les valeurs propres possibles pour p ?

b) Montrer que p est diagonalisable si, et seulement si, $p^3 = p$.

Exercice 10 (Examen 2 2011)**.** Soit $a \in \mathbb{C}^*$. On considère la matrice $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$ définie par

$$A_{i,j} = \begin{cases} a & \text{si } i - j = 1 \\ a^{-n+1} & \text{si } i - j = 1 - n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1}$$

1) Calculer le déterminant de A.
2) Calculer le polynôme caractéristique et le spectre de A.
3) Montrer que A est diagonalisable.
4) Déterminer les espaces propres de A.
5) Quel est le polynôme minimal de A ?
   On considère la matrice $B = (a^{i-j})_{1 \leq i,j \leq n}$.
6) Quel est le rang de B ?
7) Calculer $I_3 + A + A^2$ lorsque $n = 3$
8) Exprimer B en utilisant A. En déduire que B est diagonalisable.
9) Déterminer le spectre et les espaces propres de B. Quel est le polynôme minimal de B ?