Université Paris 7 - Paris Diderot — Premier semestre 2012/13
Licence deuxième année - MM3 — Maths Info 2

Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1. Parmi les énoncés suivants (où u et v sont deux suites de nombres réels), quels sont ceux qui sont vrais ?

- (a) Si u est croissante et convergente, elle est majorée.
- (b) Si u est majorée et convergente, elle est croissante.
- (c) Si u est décroissante et positive, elle converge.
- (d) Si u est croissante et non majorée, elle diverge.
- (e) Si u et v sont divergentes, $u + v$ est divergente.
- (f) Si u est convergente et v divergente, $u + v$ est divergente.
- (g) Si u est convergente et v divergente, uv est divergente.
- (h) Si u tend vers 0, uv tend vers 0.

Exercice 2. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Montrer que si les sous-suites de u : $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, il en est de même de u.

Exercice 3. Soient a et b deux nombres complexes tels que $a^2 + 4b = 0$. Soit S l'ensemble des suites $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_{n+2} = aw_{n+1} + bw_n$$

Montrer que les suites $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ définies par $u_n = \left(\frac{a}{2}\right)^n$ et $v_n = n\left(\frac{a}{2}\right)^n$ appartiennent à S et que toute suite appartenant à S est une combinaison linéaire de u et v.

Exercice 4. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Montrer que si il existe une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{N}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $f(x) \leq n \Leftrightarrow x \leq u_n$, alors la suite u est croissante.

Exercice 5. Irrationalité de e

On considère les deux suites de réel u et v définies par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{nn!}. \tag{1}$$

1) Montrer que u et v sont adjacentes. On note e leur limite commune.
2) Montrer que $n!u_n < n!e < n!u_n + \frac{1}{n!}$.
3) En déduire que e est irrationnel.

Exercice 6. Pour $n \geq 1$, on considère le polynôme $P_n(X) = Xn + Xn - 1 + \cdots + X - 1$.

1) Démontrer que P_n possède une seule racine dans $\mathbb{R}^+$, que l'on note u_n.
2) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, et en déduire qu'elle converge.
3) Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq \frac{1}{2}$
4) Démontrer que (u_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

Exercice 7. Un développement asymptotique

On considère, pour chaque entier $n \in N$, l'equation $x + ln(x) = n$.

1) Démontrer que cette équation admet une unique solution $x_n \in]0, +\infty[$, puis démontrer que la suite (x_n) est strictement croissante.
2) Démontrer que (x_n) tend vers $+\infty$.
3) Démontrer que $x_n \approx_{+\infty} n$.
4) Démontrer que $x_n = n - \ln(n) + o(\ln(n))$.(on pourra poser a_n tel que $\frac{x_n}{n} = 1 + a_n$).
5) Démontrer que $xn = n - \ln(n) + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{ln(n)}{n}\right)$.

Exercice 8. On considère la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x^2 + 3/16$ et $u_0 \geq 0$.

1) Etudier f et le signe de $f(x) - x$. Quelles sont les limites possible de (u_n) ?
2) On suppose $u_0 \in [0, 1/4]$. Montrer que $un2[0, 1/4]$ pour tout n, puis que (u_n) est croissante. Quelle est la nature de (u_n) (si elle est convergente, préciser sa limite) ?
3) On suppose $u0 \in [1/4; 3/4]$. Montrer que (u_n) est décroissante et minorée. Quelle est la nature de (u_n) (si elle est convergente, préciser sa limite) ?
4) On suppose $u_0 > 3/4$. Montrer que (u_n) est croissante. Quelle est la nature de (u_n) (si elle est convergente, préciser sa limite) ?

Exercice 9. Soit $f :]0, +\infty[\mapsto]0, +\infty[$ définie par $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$. On considère la suite récurrente (u_n) vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$.

1) Montrer que l'intervalle $[1, 3]$ est stable par f. Que peut-on en déduire sur (u_n) ? Quel est le sens de variation de f sur $[1, 3]$?
2) Soient (v_n) et (w_n) les suites définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Montrer que (vn) est croissante.
3) Démontrer que (w_n) est décroissante.
4) En déduire que (v_n) et (w_n) sont convergentes et déterminer leur limite respective.
5) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

Exercice 10. Limite inférieure, limite supérieure

Soient $un = \frac{n+1}{n} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ et $v_n = \frac{n-1}{n} n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. Calculer $\limsup_{n\to+\infty} u_n$, $\liminf_{n\to+\infty} u_n$, $\limsup_{n\to+\infty} v_n$, $\liminf_{n\to+\infty} v_n$, $\limsup_{n\to+\infty} u_n + v_n$, $\liminf_{n\to+\infty} u_n + v_n$.

Exercice 11. Valeur d'adhérence

1) Quelles sont les valeurs d'adhérence de la suite $(-1)^n$? de la suite $\cos(n\pi/3)$?
2) Donner un exemple de suite qui ne converge pas et qui possède une unique valeur d'adhérence.
3) Prouver que si (u_n) est bornée et est divergente, elle admet toujours deux valeurs d'adherence distinctes.

Exercice 12. Suites de Cauchy

1) Montrer que toute suite convergente est une suite de Cauchy.
2) On souhaite prouver la réciproque à la question précédente. Soit (u_n) une suite de Cauchy. Montrer que (u_n) est bornée.
3) On suppose que (u_n) admet une suite extraite convergente. Montrer que (u_n) est convergente.
4) Conclure.